УДК 621;678.029.6

Дырда В.И., Кагадий С.В., Науменко Н.Н.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОГО ОДНОСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ ДЛИННЫМ ШТАМПОМ

Розглядається рішення задачі про деформування гумової одношарової основи жорстким штампом.

DEFORMATION OF AN ELASTIC SINGLE-LAYER FOUNDATION BY A LENGTHY TITLE BLOCK

The solution of a problem of deformation of a rubber single-layer fundamentals by a rigid title block is considered.

Известны модели упругого однослойного основания [1,2], которые отличаются от модели Винклера способностью учитывать касательные напряжения, возникающие при его нагружении. Для случая, когда с однослойным основанием взаимодействует жесткое тело, представляется возможным получить более простую зависимость вежду вертикальными перемещениями и нагрузкой.

Предположим, что упругое основание представляет собой сжимаемый слой толщиной h, лежащий на основании бесконечно жестом. Рассматриваемый слой нагружается длинным плоским штампом постоянного сечения.

Выделим из упругого основания двумя плоскостями, проходящими через нормальное сечение штампа на расстоянии δ друг от друга, узкую пластинку (рис. 1). Такая пластинка будет находиться в одинаковых условиях с любой соседней, и перемещение всех ее точек будут происходить в плоскостях, параллельных проведенным сечениям. Рассматриваемая пластинка будет находиться в условиях плоской деформации, и ее можно рассчитывать как отдельную балку прямоугольного сечения. Считая, что деформирование пластинки происходит симметрично по обе стороны штампа, за расчетную схему однослойного основания примем половину пластинки (рис. 2).

Предполагая, что в процессе нагружения основания деформироваться будет материал, находящийся в непосредственной близости от штампа, примем для определенности правое сечение балки защемленным и выясним как влияет полученная балка на деформирование силой P ее

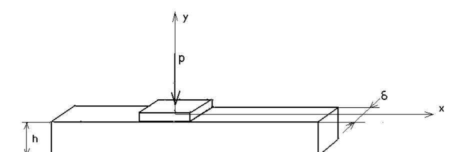

Рис. 1 — Схема нагружения

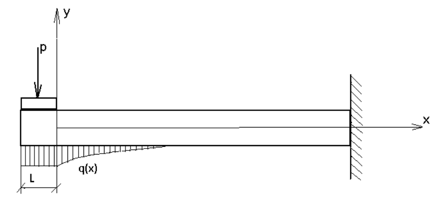

Рис. 2 — Расчетная схема

левого края. Воспользуемся решением Бубнова И.Г., по которому прогибы балки перерезывающей силой Q могут определяться из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{kQ(x)}{GF}, \tag{1}$$

где Q – перерезывающая сила в сечении с координатой x;
G – модуль упругости материала основания при сдвиге;
$F = \delta \cdot h$ – площадь сечения балки;
k – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балки, для прямоугольного сечения $k = 6/5$.

Знак «минус» в выражении (1) принят в связи с тем, что для $x > 0$ перерезывающая сила $Q(x) < 0$, а угол поворота сечения балки при ее деормировании силой P будет положительным $(y'(x) > 0)$.

Из уравнения (1) следует

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{k}{GF}\frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{k}{GF}g(x), \tag{2}$$

где $q(x)$ – нагрузка, распределенная по нижнему основанию балки, препятствующая ее прогибу вниз.

Нагрузку $q(x)$ можно установить из тех соображений, что основание податливо и при вертикальном сжатии элемента балки длиной dx его осадка приближенно будет равна

$$\Delta h = \frac{qh}{E\delta}. \tag{3}$$

При этом для плоской деформации [3]

$$E = \frac{E_0}{1 - \mu_0}.$$

Предполагая линейную зависимость между нагрузкой и осадкой основания, из выражения (3) можно установить

$$q(x) = -\frac{2E\delta}{h}y.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \alpha y = 0, \tag{4}$$

где $\alpha = \frac{12}{5}\frac{E}{Gh^2}$.

Решение дифференциального уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям на правом конце рассматриваемой балки, будет иметь вид

$$y = Ce^{-\sqrt{\alpha}\,x}.$$

Постоянная интегрирования C может быть установлена при определении осадки основания под штампом на левом краю балки от известной нагрузки P.

$$y(0) = -\frac{P - 2Q(0)}{2E\delta l} h \,, \qquad (6)$$

где δl — площадь поверхности основания под штампом, сжимаемая вертикальной нагрузкой $P - Q(0)$.

Подставляя в формулу (6) перерезывающую силу из дифференциального уравнения (1) и учитывая выражение (5), для коэффициента C можно получить

$$C = \frac{P}{\frac{2E\delta l}{h} + \delta\sqrt{\frac{5EG}{3}}} \,. \qquad (7)$$

В качестве примера рассматривается расчет осадки резинового слоя толщиной h = 0,1 м силой P = 1000 Н при размерах штампа l = 0,1 м, δ = 0,1 м. Модуль упругости резины E_0 принят равным $8{\cdot}10^6$ Н/м^2, коэффициент Пуассона μ_0 = 0,47. С учетом этих значений можно получить

$E = E_0/(1-\mu_0^2)$ $= 8{\cdot}10^6/(1\text{-}0{,}47^2) = 10{,}268$ (Н/м^2).

Для осадки основания в соответствии с формулой (7) будем иметь

$$\Delta h = 2y_0 = 1000 \Big/ \left(10{,}268 \cdot 10^6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1/0{,}1 + 0{,}1\sqrt{5 \cdot 10{,}268 \cdot 10^6 \cdot 2{,}72 \cdot 10^6/3}\right) = 6{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Значение осадки без учета касательных напряжений составит

$$\Delta h_0 = \frac{Ph}{E\delta l} = 1000{\cdot}0{,}1/(10{,}268{\cdot}10^6{\cdot}0{,}1{\cdot}0{,}1) = 9{,}8{\cdot}10^{-4} \text{ (м)}.$$

Таким образом, уравнение (5) с учетом выражения (4) позволяет устанавливать осадку основания под штампом и во всей зоне деформирования основания с учетом возникающих в нем касательных напряжений. Из формулы (7) вытекает очевидное уменьшение осадки в связи с наличием второго слагаемого в знаменателе. Именно это слагаемое является следствием наличия касательных напряжений. Очевидно, что для узкого штампа (при достаточно малом значении его ширины l), это слагаемое может быть определяющим при расчете осадки. Следует отметить также, что формула (5) позволяет устанавливать также и границы зоны деформирования упругого основания, т.е. находить его необходимые размеры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. —М.: Физматгиз, 1960. —491 с.
2. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. —М.;Л.: Госстройиздат, 1954. —268 с.
3. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. —М.: Физматгиз, 1959. —364 с.